Examen National 2015
Session Rattrapage

Exercice 1 (3 points) :

On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ le plan (P) d'équation : $x+y+z+4=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1\,,-1\,,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

0,75 1) a) Calculer la distance $d(\Omega\,,(P))$, puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

0,5 b) Vérifier que $H(0\,,-2\,,-2)$ est le point de tangence

2) On considère les points $A(2\,,1\,,1)$ et $B(1\,,0\,,1)$

0,75 a) Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. En déduire que : $x-y-z=0$ est une équation du plan (OAB)

0,5 b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et orthogonale au plan (OAB)

0,5 c) Déterminer le triplet de coordonnées de chacun des points d'intersection de (Δ) et (S)

Exercice 2 (3 points) :

0,75 1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ d'équation : $z^2+10z+26=0$

2) On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$ les points A , B , C et Ω d'affixes respectives : $a=-2+2ib$, $b=-5+i$, $c=-5-i$ et $\omega=-3$

1 Montrer que : $\frac{b-\omega}{a-\omega}=i$, puis en déduire la nature du triangle ΩAB

3) On désigne par D le point image de C par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $6+4i$

0,5 a) Montrer que l'affixe du point D est : $d=1+3i$

0,75 b) Montrer que : $\frac{b-d}{a-d}=2$, puis en déduire que A et le milieu de segment [BD]

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 8 boules indiscernables au toucher : 3 rouges, 3 vertes et 2 blanches

On tire au hasard, successivement et sans remise 2 boules de l'urne U

1) On considère les événements suivants : A : « Obtenir au moins une boule blanche »
B : « Obtenir deux boules de même couleur »

1,5 Montrer que : $p(A)=\frac{13}{28}$ et $p(B)=\frac{1}{4}$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées

0,5 a) Montrer que : $p(X=2)=\frac{1}{28}$

1 b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X)

Prof_Rabie_Maths
www.profrabiemaths.com

	Problème (11 points) :
	I. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^x - 2x$
0,75	1) Calculer g'(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire que g est décroissante sur $]-\infty, \ln(2)]$ et croissante sur $[\ln(2), +\infty[$
0,5	2) Vérifier que $g(\ln(2)) = 2(1 - \ln(2))$, puis déterminer le signe de $g(\ln(2))$
0,5	3) En déduire $x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0$
	II. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x}{e^x - 2x}$ et soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique : 1 cm
1	1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ (remarque que $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x - 2x = x\left(\frac{e^x}{x} - 2\right)$)
0,5	b) Interpréter géométriquement les deux résultats précédents
0,75	2) a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f'(x) = \frac{(1-x)e^x}{(e^x - 2x)^2}$
0,75	b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
0,25	c) Montrer que y = x est une équation de la tangent (T) à (C_f) à l'origine O du repère
1	3) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la tangente (T) et la courbe (C_f) (on donne $\frac{1}{e-2} \approx 1{,}4$ et on admet que (C_f) possède deux points d'inflexion, l'abscisse de l'un d'entre eux appartient à l'intervalle $]0,1[$ et l'abscisse de l'autre supérieure à $\frac{3}{2}$)
0,75	4) a) Montrer que : $(\forall x > 0)$, $xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x - 2x} \leq \frac{1}{e-2}$
0,75	b) En intégrant par parties, montrer que : $\int_0^1 xe^{-x}\, dx = 1 - \frac{2}{e}$
0,5	c) En note A(E) l'aire, en cm², du domaine (E) délimité par le courbe (C_f), l'axe des abscisses, et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$. Montrer que : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$
	III. On considère la fonction h définie sur $]-\infty, 0]$ par : $h(x) = f(x)$
0,5	1) Montrer que la fonction h possède une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser
0,5	2) Tracer dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe représentative $(C_{h^{-1}})$ de la fonction h^{-1}
	IV. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = -2$ et $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_{n+1} = h(u_n)$
0,5	1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n \leq 0$
0,75	2) Montrer que (u_n) est croissante (on pourra remarquer que $\forall x \leq 0$, $h(x) \geq x$)
0,75	3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite

Prof_Rabie_Maths
Prof_Rabie_Maths
www.profrabiemaths.com